

Ασκήσεις Ανάλυση Ι

Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 1

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

1) Δύο καράβια αναχωρούν από το ίδιο λιμάνι. Το ένα κινείται με 15 Km/h προς τα νότια και το άλλο με 20 Km/h προς τα ανατολικά. Να εκφράσετε την απόσταση μεταξύ των πλοίων σαν συνάρτηση του χρόνου t από την ώρα της αναχώρησης (η απόσταση να εκφραστεί σε χιλιόμετρα Km , και ο χρόνος σε ώρες h).

Λύση: Μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε σε μια γραμμική σχέση $S(t)(\text{Km}) = 25t(\text{Hours})$.

2) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

1. $f_1(x) = (3x^2 - 12)^{4x}$

2. $f_2(x) = \ln(4^x - 2^x - 56)$

3. $f_3(x) = \sqrt{\ln \left[\ln \left(\frac{6x+5}{-3x+7} \right) \right]}$

4. $f_4(x) = \sqrt{|x^2 + 8x - 9| - 24}$

Λύση:

1. Πρέπει $3x^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow \{x < -2 \text{ ή } x > 2\}$.
Επομένως το πεδίο ορισμού είναι $D(f_1) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

2. Πρέπει $4^x - 2^x - 56 > 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 56 > 0$. Θέτοντας $y = 2^x$ έχουμε $y^2 - y - 56 > 0 \Leftrightarrow \{y < -7 \text{ ή } y > 8\} \Leftrightarrow 2^x < -7$ (αδύνατη), και $2^x > 8 \Leftrightarrow 2^x > 2^3 \Leftrightarrow x > 3$.
Επομένως $D(f_2) = (3, +\infty)$.

3. Πρέπει $\ln \left[\ln \left(\frac{6x+5}{-3x+7} \right) \right] \geq 0 \Leftrightarrow \ln \left[\ln \left(\frac{6x+5}{-3x+7} \right) \right] \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{6x+5}{-3x+7} \right) \geq 1 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{6x+5}{-3x+7} \right) \geq \ln e \Leftrightarrow \frac{6x+5}{-3x+7} \geq e \Leftrightarrow \frac{6x+5}{-3x+7} - e \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(6+3e)x + (5-7e)}{-3x+7} \geq 0 \Leftrightarrow [(6+3e)x + (5-7e)](-3x+7) \geq 0$ και $-3x+7 \neq 0 \Leftrightarrow \frac{7e-5}{6+3e} \leq x < \frac{7}{3}$. Άρα $D(f_3) = \left[\frac{7e-5}{6+3e}, \frac{7}{3} \right)$.

4. Πρέπει $|x^2 + 8x - 9| - 24 \geq 0 \Leftrightarrow |x^2 + 8x - 9| \geq 24 \Leftrightarrow \{x^2 + 8x - 9 \geq 24 \text{ ή } x^2 + 8x - 9 \leq -24\} \Leftrightarrow \{x^2 + 8x - 33 \geq 0 \text{ ή } x^2 + 8x + 15 \leq 0\} \Leftrightarrow \{(x \leq -11 \text{ ή } x \geq 3) \text{ ή } -5 \leq x \leq -3\}$. Επομένως το πεδίο ορισμού είναι $D(f_4) = (-\infty, 11] \cup [-5, -3] \cup (3, +\infty)$.

3) Να βρεθεί (αν υπάρχει) η αντίστροφη συνάρτηση των :

1. $f_1(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

2. $f_2(x) = \frac{3^x}{1+3^x}$

Λύση:

1. Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης έχουμε: $D(f_1) = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε $x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1} = x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1} \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1} = x_2 - x_1 \Rightarrow x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1 - 2\sqrt{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \Rightarrow 1 + x_1x_2 = \sqrt{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} \Rightarrow 1 + x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. Επομένως η συνάρτηση είναι 1-1, οπότε και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 1}$ και επειδή $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $y - x > 0 \Leftrightarrow y > x$, οπότε $(y - x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y}$ για $y \neq 0$.

Έχουμε επίσης $y > x \Leftrightarrow y > \frac{y^2 - 1}{2y} \Leftrightarrow \frac{2y^2 - y^2 + 1}{2y} > 0 \Leftrightarrow 2(y^2 + 1)y > 0 \Leftrightarrow y > 0$.

Άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f_1^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$ με πεδίο ορισμού $D(f_1^{-1}) = (0, +\infty)$.

2. Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης έχουμε: $D(f_2) = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε $\frac{3^{x_1}}{1+3^{x_1}} = \frac{3^{x_2}}{1+3^{x_2}} \Rightarrow 3^{x_1} + 3^{x_1+x_2} = 3^{x_2} + 3^{x_1+x_2} \Rightarrow 3^{x_1} = 3^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Επομένως η συνάρτηση είναι 1-1, οπότε και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $y = \frac{3^x}{1+3^x} \Rightarrow 3^x = \frac{y}{1-y}$ με $y \neq 1$. Επειδή $3^x > 0$ έχουμε $\frac{y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow 0 < y < 1$.

1. Επομένως για την αντίστροφη συνάρτηση έχουμε $3^y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow y \ln 3 = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow f_2^{-1}(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}{\ln 3}$, με πεδίο ορισμού $D(f_2^{-1}) = (0, 1)$ αφού πρέπει $\frac{x}{1-x} > 0$.

4) Να υπολογιστούν τα όρια :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{2x^2 + x - 3}$

2. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 16}}{x + 4}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - 2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x - 1}}{x^2 - 4}$

Λύση: Σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$.

1. Το πεδίο ορισμού $D(f)$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3-3x^2-x+3}{2x^2+x-3}$ είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}, 1\}$.
Για κάθε $x \in D(f)$ έχουμε $f(x) = \frac{(x-3)(x^2-1)}{(x-1)(2x+3)} = \frac{(x-3)(x+1)}{(2x+3)}$. Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)(x+1)}{(2x+3)} = \frac{-2 \cdot 2}{5} = -\frac{4}{5}$.
2. Το πεδίο ορισμού $D(f)$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}$ είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{-4\}$.
Για κάθε $x \in D(f)$ έχουμε $f(x) = \frac{\sqrt{(x+4)^2}}{x+4} = \frac{|x+4|}{x+4} = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < -4 \\ 1, & \text{αν } x > -4 \end{cases}$ Επειδή $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 1$ δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$.
3. Το πεδίο ορισμού $D(f)$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-\sqrt{2}}}{\sqrt{x-2}}$ είναι $D(f) = (2, +\infty)$.
Για κάθε $x \in D(f)$ έχουμε $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-\sqrt{2}}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x+2} + \frac{(\sqrt{x-\sqrt{2}})(\sqrt{x+\sqrt{2}})\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+\sqrt{2}})} = \sqrt{x+2} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+\sqrt{2}}}$. Οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt{x+2} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+\sqrt{2}}} \right) = \sqrt{4} + 0 = 2$.
4. Το πεδίο ορισμού $D(f)$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}$ είναι $D(f) = [1, +\infty) - \{2\}$. Για κάθε $x \in D(f)$ έχουμε $f(x) = \frac{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}{(x^2-4)(1+\sqrt{x-1})} = \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)(1+\sqrt{x-1})} = \frac{-1}{(x+2)(1+\sqrt{x-1})}$. Οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{1}{8}$.

5) Να υπολογιστούν τα όρια :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(x-a)}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x^2}$

Λύση: Σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$.

1. Έχουμε $\frac{\sin(a+x) + \sin(x-a)}{x} = \frac{2 \sin x \cos a}{x}$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(x-a)}{x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \cos a = 2 \cdot 1 \cdot \cos a = 2 \cos a$.

$$\begin{aligned}
2. \text{ Έχουμε } \frac{\tan x - \sin x}{x^3 \cos x} &= \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3 \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2 \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \\
&\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \text{ Έχουμε } \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} &= \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} \\
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \text{ Έχουμε } \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x^2} &= \frac{\sqrt{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{x} \left|\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right| \\
&\text{Επειδή } x \rightarrow 0^+ \text{ έχουμε } x > 0, \text{ οπότε } \left|\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right| = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (+\infty) \cdot 1 = +\infty.
\end{aligned}$$

6) Μία μπάλα εκτοξεύεται κατακόρυφα από ύψος 10 m με αρχική ταχύτητα $u_0 = +100 \text{ m/sec}$. Να παρασταθεί γραφικά η τροχιά της (το ύψος σαν συνάρτηση του χρόνου για πέντε ανακλάσεις) υποθέτοντας ότι η ανάκλασή της στο έδαφος είναι ελαστική (χωρίς απώλειες ενέργειας) ή μη-ελαστική (με απώλειες).

Λύση: Αρχικά η μπάλα έχει μια γνωστή αρχική ενέργεια (δυναμική και κινητική) και εκτοξεύεται προς τα πάνω. Το μέγιστο ύψος που μπορεί να φτάσει το υπολογίζουμε από την μετατροπή της αρχικής ενέργειας σε δυναμική. Το δεύτερο στοιχείο είναι ο χρόνος που θα κάνει για να φτάσει στο μέγιστο. Από εκεί πέρα μας ενδιαφέρει ο χρόνος που θα χρειαστεί να φτάσει στο έδαφος και να επανέλθει στο ίδιο ύψος. Με βάση αυτές τις πληροφορίες τοποθετούμε τα χαρακτηριστικά σημεία στη καμπύλη $(h(t), t)$ και το μόνο που μένει είναι να ζωγραφίσουμε (με βάση τη εξίσωση $h(t)$ vs. t που την βρίσκουμε αναλυτικά την μορφή της). (Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα ή υπολογίστε την για να αποδείξετε ότι είναι μάλλον αμελητέα.) Στη δεύτερη περίπτωση αποφασίστε, εμπειρικά, την ενέργεια που θα χάσει στην επαφή με το έδαφος και σε κάθε αναπήδηση ξεκινήστε με νέα κινητική ενέργεια από το έδαφος και προσδιορίστε τα χαρακτηριστικά σημεία εκ νέου (μέγιστο ύψος και χρόνο πορείας από το έδαφος στο έδαφος)... στη νέα καμπύλη το μέγιστο ύψος θα είναι μεταβαλλόμενο αλλά και ο συνολικός χρόνος για την επιστροφή στο έδαφος θα αλλάζει (δουλέψτε μόνοι σας τις λεπτομέρειες).

Ασκήσεις Ανάλυση Ι

Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 2

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

1) Υπολογίστε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων

1. $y = x^{\sin x}$

2. $y = \ln[x^2 \sqrt[3]{7x-14}] - \ln[(1+x^2)^4]$

3. $y = \sin^{-1} x^3$

Λύση:

1. $y(x) = e^{\sin x \ln x} \rightarrow y'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right), \quad x > 0$

2. $y(x) = \ln[x^2 \sqrt[3]{7x-14}] - \ln[(1+x^2)^4] \rightarrow y'(x) = 2/x + 7/(3(7x-14)) - 8x/(1+x^2), \quad x > 2$

3. $y(x) = \arcsin x^3 \rightarrow y'(x) = 3x^2/\sqrt{1-x^6}, \quad -1 < x < 1$

2) Υπολογίστε την δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων

1. $y = \cos^{-1}(3x)$

2. $x^3 + y^3(x) = 0$

Λύση:

1. $y = \arccos(3x) \rightarrow y''(x) = \frac{-27x}{(1-9x^2)^{3/2}}, \quad x \neq 1/3$

2. $x^3 + y^3(x) = 0 \rightarrow y''(x) = 0$

3) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x^4 - 2x + 6)\phi(x),$$

όπου $\phi(0) = 6$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \{[\phi(x) - 6]/x\} = 4$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση: Η εφαπτομένη θα προσδιοριστεί από τη σχέση

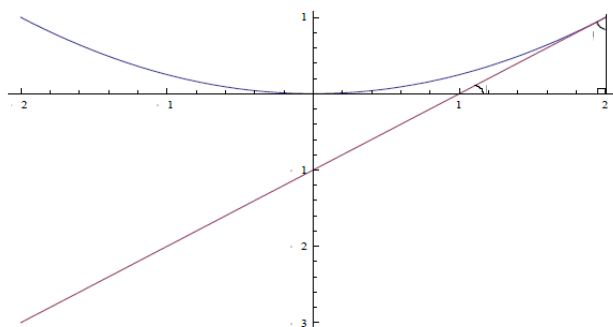
$$y = f(0) + f'(0)x$$

με βάση τα δεδομένα $f(0) = 36$ και $f'(0) = -2\phi(0) + 6\phi'(0) = -12 + 24 = 12$ άρα

$$y = 36 + 12x$$

4) Σύρμα κρέμεται, σε σχήμα παραβολής, από δύο κολώνες ύψους $1m$ που απέχουν $4m$. Αν το χαμηλότερο σημείο του σύρματος ακουμπά στο έδαφος, να προσδιοριστεί η γωνία σύρματος - κολώνας.

Λύση: Με βάση την εκφώνηση συμπεραίνουμε ότι μαθηματική απεικόνιση της καμπύλης του σύρματος θα είναι $y(x) = (x/2)^2$, $x \in [-2, 2]$. Υπολογίζουμε την εφαπτομένη στο σημείο $(2, 1)$ και βρίσκουμε ότι η ζητούμενη γωνία θα είναι 45° . (βλέπε Σχ. 1)



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση για την άσκηση 4

5) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = t^2 - 2t$ και $y(t) = 3t^2 - 4t$, στο σημείο P με $t = -1$.

Λύση: Το σημείο P έχει συντεταγμένες $(3, 7)$. Βρίσκουμε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{6t-4}{2t-2}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$.

6) Να προσδιοριστούν τα $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & \text{αν } x \geq 1 \\ x + b \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right), & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση: Αναγκαία συνθήκη ώστε η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ είναι να είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Η συνέχεια εξασφαλίζεται όταν $a = b\frac{\sqrt{2}}{2}$. Απαιτώντας την ισότητα της δεξιάς με την αριστερή παράγωγο στο $x_0 = 1$ οδηγούμαστε στην σχέση $1 + b\frac{\pi\sqrt{2}}{8} = 2 + a$. Από τις δυο αυτές σχέσεις βρίσκουμε τελικά $a = \frac{4}{\pi-4}$ και $b = \frac{4\sqrt{2}}{\pi-4}$.

Ασκήσεις Ανάλυση Ι

Ομάδα 3

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος
Λύσεις

1) Η αντίδραση y ενός οργανισμού στην χορήγηση ενός φαρμάκου εξαρτάται από την ποσότητα x του χορηγούμενου φαρμάκου. Αν η σχέση που συνδέει τα x και y είναι $y = x^2(a - x)$, όπου $a > 0$ σταθερά, να βρεθεί η ποσότητα x για την οποία η αντίδραση γίνεται μέγιστη.

Λύση: Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι $y'(x) = 2ax - 3x^2$, οπότε τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = 0$ (αποκλείεται) και $x = \frac{2a}{3}$. Επειδή $y''(\frac{2a}{3}) = -2a < 0$ καταλαβαίνουμε ότι για $x = \frac{2a}{3}$ η αντίδραση του οργανισμού γίνεται μέγιστη.

2) Μια βιομηχανία πρόκειται να κατασκευάσει ένα κυλινδρικό δοχείο σταθερού όγκου V , το οποίο είναι ανοικτό στο επάνω μέρος του. Να βρεθεί το πηλίκο του ύψους δια της ακτίνας της βάσης του δοχείου προκειμένου το κόστος κατασκευής να είναι ελάχιστο, γνωρίζοντας ότι η μονάδα επιφάνειας της βάσης κοστίζει το διπλάσιο από τη μονάδα επιφάνειας της παράπλευρης επιφάνειας.

Λύση: Έστω r η ακτίνα της βάσης, h το ύψος του δοχείου, $V = \pi r^2 h$ ο όγκος του, k το κόστος της μονάδας επιφάνειας της παράπλευρης επιφάνειας και $2k$ το κόστος της μονάδας επιφάνειας της βάσης. Επομένως το συνολικό κόστος είναι $C = 2k\pi r^2 + k2\pi r h \Rightarrow C(r) = 2k(\pi r^2 + \frac{V}{r})$. Εύκολα βρίσκουμε ότι $C'(r) = 2k(2\pi r - \frac{V}{r^2}) = 2k\pi(2r - h)$ και $C''(r) = 4k(\pi + \frac{V}{r^3}) = 4k\pi(1 + \frac{h}{r})$. Επομένως το κόστος γίνεται ελάχιστο όταν $r = \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{h}{r} = 2$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 2}$.

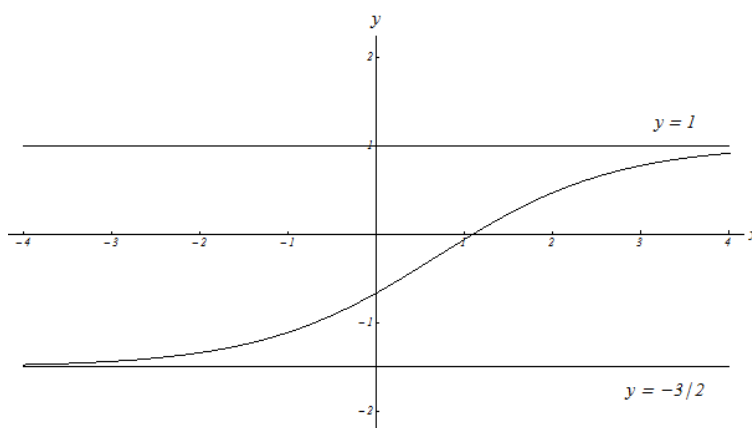
1. Να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την καμπυλότητα, τα σημεία καμπής της και τις ασύμπτωτες που τυχόν έχει.
2. Να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση της $f(x)$.

Λύση: Η $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$. Για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο έχουμε αντίστοιχα: $f'(x) = \frac{5e^x}{(e^x + 2)^2}$ και $f''(x) = \frac{5e^x(2 - e^x)}{(e^x + 2)^3}$. Επειδή $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ η $f(x)$ είναι

γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα. Ακόμη $f''(x) > 0, \forall x \in (-\infty, \ln 2)$, ενώ $f''(x) < 0, \forall x \in (\ln 2, +\infty)$, άρα η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω $\forall x \in (-\infty, \ln 2)$, ενώ στρέφει τα κοίλα κάτω $\forall x \in (\ln 2, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο $M(\ln 2, -\frac{1}{4})$. Επίσης, αφού $D_f = \mathbb{R}$, η $f(x)$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, ενώ επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$, η γραφική παράσταση της $f(x)$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 1$ για $x \rightarrow +\infty$ και την $y = -\frac{3}{2}$ για $x \rightarrow -\infty$. Στο Σχ. 1 φαίνεται ο πίνακας τιμών των $f'(x)$, $f''(x)$ και στο Σχ. 2 η γραφική παράσταση της $f(x)$.

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$			
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Σχήμα 1: Ο πίνακας τιμών των $f'(x)$ και $f''(x)$ και για την άσκηση 3.



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση για την άσκηση 3.

4) Να βρεθεί κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης με εξίσωση $y^2 + xy - x^2 = 5$ στο σημείο $A(1, -3)$, και της καμπύλης με εξίσωση $y^3 + 3xy^2 - 2x^2y - 1 = 0$ στο σημείο $B(\frac{3}{2}, 1)$.

Λύση: Για την πρώτη καμπύλη έχουμε $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x+2y}$, και για την δεύτερη $\frac{dy}{dx} = \frac{4xy-3y^2}{3y^2+6xy-2x^2}$. Οπότε οι κλίσεις είναι αντίστοιχα $m_1 = -1$ και $m_2 = \frac{2}{5}$.

5) Δύο ποδηλάτες ξεκίνησαν ταυτόχρονα από δύο πόλεις που απέχουν $40km$ και κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα $20km/h$. Μια μύγα ξεκινώντας επίσης από το

τιμόνι του ενός ποδηλάτη πέταει μέχρι το τιμόνι του δεύτερου ποδηλάτη και επιστραφεί στον πρώτο. Επαναλαμβάνει αυτή την πορεία, μπρος πίσω συνεχώς μέχρι να συναντηθούν οι δύο ποδηλάτες. Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε η μύγα αν κινείται με ταχύτητα $30km/h$.

Λύση: Οι ποδηλάτες θα συναντηθούν μετά από μία ώρα, άρα η μύγα θα καλύψει συνολικά $30km$.

6) Μια κυρία ύψους $1.70m$ βαδίζει με ρυθμό $1m/sec$ προς το σημείο που βρίσκεται ένας στύλος της ΔΕΗ ύψους $5.5m$. Πόσο γρήγορα το μήκος της σκιάς της αλλάζει;

Λύση: Απο το Σχ. 3, κάνοντας χρήση των ομοίων τριγώνων έχουμε

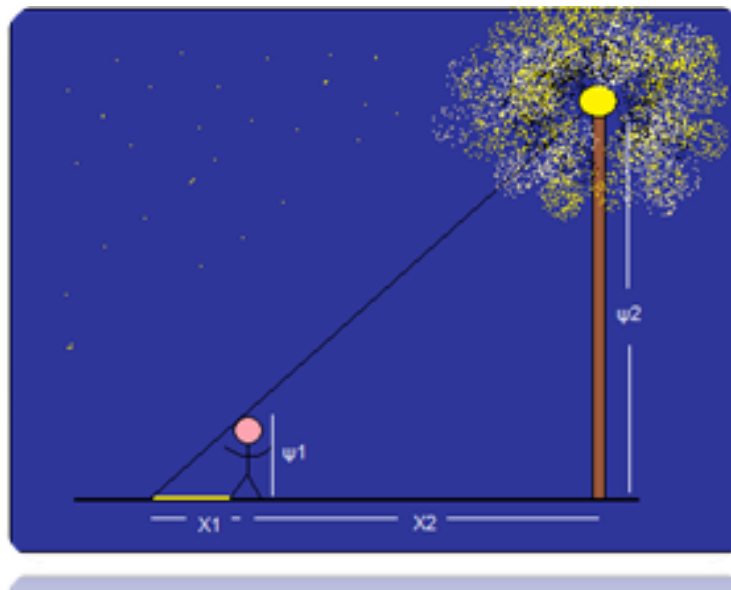
$$\frac{5.5}{1.7} = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{x_1(t)}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της σκιάς dy/dt υπολογίζεται απο την σχέση

$$x_1(t) = \frac{1.7}{3.8} x_2(t)$$

ή

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1.7}{3.8} \frac{dx_2}{dt} = \frac{1.7}{3.8} \cdot (-1cm/sec)$$



Σχήμα 3: Η κυρία και η σκιά της

Ασκήσεις Ανάλυση I

Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 4

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

1) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού αποδείξτε ότι:
 $2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}.$

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, με πεδίο ορισμού $D_f = (0, +\infty)$ και το κλειστό διάστημα $[2, e]$. Η f είναι συνεχής στο $[2, e]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, e)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$. Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού οπότε $\exists \xi \in (2, e) : f'(\xi) = \frac{f(e) - f(2)}{e - 2} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{1 - \ln 2}{e - 2}$. Αλλά $2 < \xi < e \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1 - \ln 2}{e - 2} > \frac{1}{e} \Rightarrow 2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}.$

2) Τρία σημεία A, B, C σχηματίζουν γωνία $\hat{B} = 60^\circ$. Ένα αυτοκίνητο φεύγει από το A ενώ ταυτόχρονα ένα τρένο φεύγει από το B . Το αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα προς το B με σταθερή ταχύτητα 80 km/h ενώ το τρένο κινείται επίσης ευθύγραμμα προς το C με σταθερή ταχύτητα 50 km/h . Αν $AB = 200 \text{ km}$ και $BC = 125 \text{ km}$, να βρεθεί πότε η απόσταση μεταξύ αυτοκινήτου και τρένου γίνεται ελάχιστη.

Λύση: Τα δύο οχήματα φθάνουν στο τέλος της διαδρομής τους την ίδια χρονική στιγμή $t = \frac{200}{80} = \frac{125}{50} = 2,5 \text{ h}$. Χρησιμοποιώντας τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε ότι το τετράγωνο της απόστασης των 2 κινητών είναι ακόλουθη συνάρτηση του χρόνου: $f(t) = 12900t^2 - 42000t + 40000$. Εύκολα βρίσκουμε ότι αυτή η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο για $t = \frac{70}{43} \text{ h}$.

3) Να υπολογιστούν τα όρια:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + \sin x}{e^x + x}$

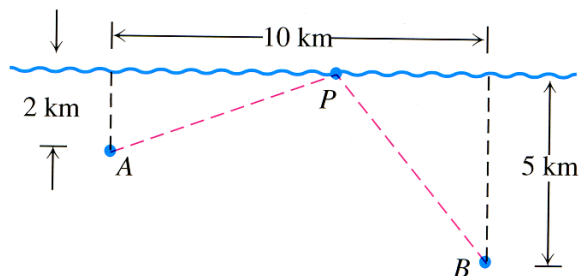
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

Λύση:

1. Παρατηρούμε ότι $x^2 + x - 1 \leq x^2 + x + \sin x \leq x^2 + x + 1$, οπότε ο αριθμητής φράσσεται από πάνω και κάτω από δύο συναρτήσεις που απειρίζονται οπότε το όριό του είναι το άπειρο. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + \sin x}{e^x + x} \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x + \sin x)'}{(e^x + x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1 + \cos x}{e^x + 1} \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \sin x}{e^x} = 0.$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^x - x)'}{(\ln x - x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(\ln x + 1)^2 + x^x \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(\sin x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(\sin x)]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(\sin x)}{1/x} \right]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(\ln(\sin x))'}{(1/x)'} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{-x^2 \cos x}{\sin x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{-2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos x} \right] = e^0 = 1.$

4) Δύο πόλεις βρίσκονται στα νότια ενός ποταμού (βλέπε σχήμα). Για τις ανάγκες ύδρευσης των πόλεων πρόκειται να κατασκευαστεί στον ποταμό ένας σταθμός αντλήσεως ύδατος, απ' όπου θα ξεκινούν δύο αγωγοί που θα φέρουν το νερό στην κάθε πόλη. Κάθε αγωγός θα κατασκευαστεί επί της ευθείας που συνδέει τον σταθμό με την αντίστοιχη πόλη. Να εκφραστεί το μήκος του αγωγού σαν συνάρτηση μιας μεταβλητής και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του.



Λύση: Από το σημείο A φέρουμε την κάθετο (AO)=2χιλ. και από το B την κάθετό (BK)=10Km. Η απόσταση (OK)=(OP)+(PK)=10Km. Εστω $x=(OP)$. Τότε $(PK)=10 - x$. Θέλουμε να βρούμε τη συνταγμένη x του σημείου P έτσι ώστε το μήκος $L=(AP)+(PB)$ να είναι ελάχιστο. Επειδή

$$L = \sqrt{2^2 + x^2} + \sqrt{5^2 + (10 - x)^2} \quad (1)$$

η άκρα τιμή (ή τιμές) του μήκους L θα είναι η ρίζα (ή ρίζες) που θα βρεθεί (ή βρεθούν) από την μηδενισμένη πρώτη παράγωγο του L ως προς x και η οποία (η οποίες) καθιστά (ή καθιστούν) τη τιμή (ή τις τιμές) της δευτέρας παραγώγου του αρνητική ή θετική αν έχουμε μέγιστο ή ελάχιστο, αντίστοιχα. Πράγματι

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x\sqrt{5^2 + (10-x)^2} + (10-x)\sqrt{2^2 + x^2}}{\sqrt{2^2 + x^2}\sqrt{5^2 + (10-x)^2}} = 0 \quad (2)$$

ή

$$x\sqrt{5^2 + (10-x)^2} = (x-10)\sqrt{2^2 + x^2} \quad (3)$$

ή

$$x^2(5^2 + (10-x)^2) = (x-10)^2(2^2 + x^2) \quad (4)$$

ή

$$5^2x^2 = 4(x-10)^2 \rightarrow 5x = 2(10-x) \rightarrow x = \frac{20}{7} \quad (5)$$

Η τιμή του μήκους L γίνεται ελάχιστη όταν η συντεταγμένη του σημείου P είναι ($x = 20/7$) και αυτή είναι: $L = L(x = 20/7) = \sqrt{149}$.

5) Ένα αεροπλάνο της τροχαίας παρακολουθεί την κίνηση σε ένα μεγάλο αυτοκινητόδρομο των ΗΠΑ πετώντας περίπου $1500m$ πάνω από το δρόμο με σταθερή ταχύτητα 200 Km/h . Χρησιμοποιώντας το ραντάρ ο πιλότος ανακαλύπτει ένα αυτοκίνητο πιθανά να έχει υπερβεί το όριο ταχύτητας και είναι σε απόσταση $2400m$ από το αεροπλάνο και για να μπορέσει να σταθεί ακριβώς από πάνω από το αυτοκίνητο χρειάζεται να ελαττώσει την ταχύτητα του με ρυθμό 220 Km/h^2 . Υπολογίστε την ταχύτητα του αυτοκινήτου.

Λύση: Την χρονική στιγμή $t = 0$ το αυτοκίνητο κινείται με σταθερά ταχύτητα v_1 που είναι το ζητούμενο και το αεροπλάνο απέχει $s_0 = 1.5 \text{ Km}$ από το αυτοκίνητο. Όταν συγχρονίζονται οι ταχύτητες του αεροπλάνου v_a με αυτή του αυτοκινήτου

$$v_1 = v_a = v_0t - at \quad (6)$$

Η απόσταση που θα διανύσει το αεροπλάνο για να συναντηθεί με το αυτοκίνητο θα είναι

$$s = s_0 + v_1t = v_0t - 1/2(at^2) \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα από την Εξ. 6 θα έχουμε

$$v_1 = v_0 - \sqrt{2s_0a} = 200 \text{ Km/h} - \sqrt{2 \cdot 1.5 \text{ Km} \cdot 220 (\text{Km/h}^2)} \simeq 175 \text{ Km/h}.$$

Άρα μάλλον ο οδηγός πρέπει να ετοιμάζεται για εκπλήξεις...

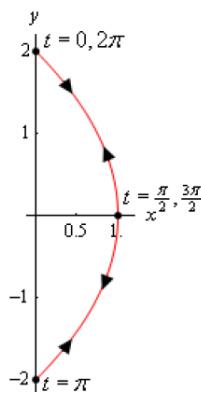
Ασκήσεις Ανάλυση I

Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 5

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

1) Να περιγράψετε την κίνηση ενός σώματος στο επίπεδο (x, y) (σχεδιάζοντας και την τροχιά του) οι συντεταγμένες του οποίου δίνονται από τις σχέσεις $x = \sin^2 t$, $y = 2 \cos t$, όπου $t \geq 0$ είναι ο χρόνος κίνησης του σώματος.

Λύση: Το σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση με περίοδο $T = 2\pi$ κινούμενο στο τμήμα της παραβολής $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ που ορίζεται από τις ανισώσεις $0 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 2$. Ξεκινά από το σημείο $(0, 2)$, φτάνει στο $(0, -2)$ σε χρόνο $t = \pi$ επιστρέφει στο αρχικό σημείο για $t = 2\pi$, όπως φαίνεται στο Σχ. 1



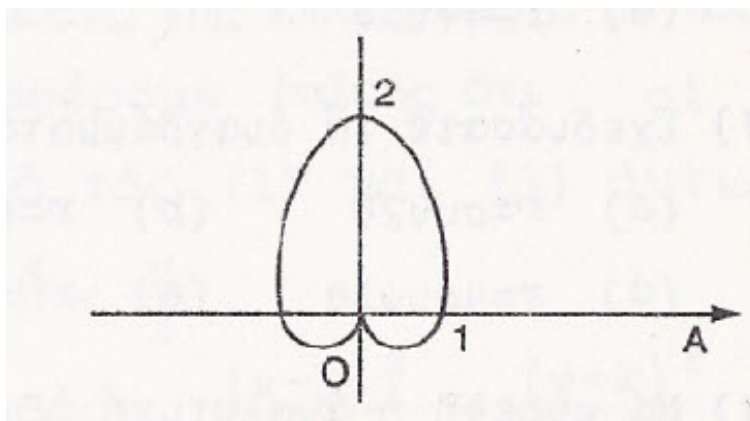
Σχήμα 1: Η τροχιά του κινητού της άσκησης 1.

2) Να σχεδιάσετε τις καμπύλες που δίνονται από τις εξισώσεις:

1. $r = 1 + \sin \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$.
2. $x = -3 + 2 \cos \theta$, $y = \sqrt{5} + 2 \sin \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Λύση:

1. Η καρδιοειδής καμπύλη του Σχ. 2.



Σχήμα 2: Η καρδιοειδής καμπύλη του ερωτήματος 2.1.

2. Κύκλος με κέντρο το σημείο $(-3, \sqrt{5})$ και ακτίνα $r = 2$.

3) Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{για } x \neq 0 \\ 0 & \text{για } x = 0 \end{cases}$$

ισχύει $f''(0) = 0$.

Λύση: Για $x \neq 0$ ισχύει $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Επίσης, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$. Οπότε ισχύει

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{για } x \neq 0 \\ 0 & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

Για τη δεύτερη παράγωγο στο 0 έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \frac{\frac{4}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$. Οπότε $f''(0) = 0$.

4) Έστω $x = t + 1/t$ και $y = t^2 + 1/t^2$ να αποδειχτεί ότι η δεύτερη παράγωγος d^2y/dx^2 είναι σταθερή και να προσδιοριστεί η παράσταση

$$K = (x^2 - 4) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y.$$

Λύση: Η παράγωγος

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

και επειδή $y = x^2 - 2$ και $(dy/dx) = 2x$ η παράσταση

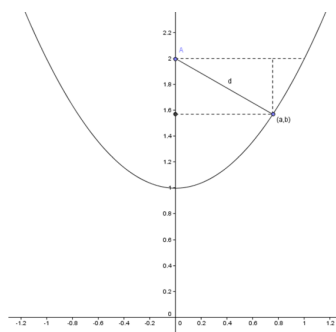
$$K = 2(x^2 - 4) + x(2x) - 4(x^2 - 2) = 0.$$

5) Υπολογίστε τα σημεία της καμπύλης $y = x^2 + 1$ που είναι πλησιέστερα στο σημείο $(0, 2)$.

Λύση: Η συνάρτηση που περιγράφει το τετράγωνο της απόστασης είναι

$$f(x) = d^2 = x^4 - x^2 + 1$$

άρα η πρώτη παράγωγος $(2x(2x^2 - 1))$ μηδενίζεται στα σημεία $(0, \pm 1/\sqrt{2})$ και η δεύτερη παράγωγος είναι θετική $(12x^2 - 2 > 0)$ (τοπικό ελάχιστο) στα σημεία $A(-1/\sqrt{2}, 3/2)$, $B(1/\sqrt{2}, 3/2)$ που είναι και τα πλησιέστερα στο σημείο $(0, 2)$ και τοπικό μέγιστο στο σημείο $(0, 1)$.



Σχήμα 3: Η καμπύλη για την άσκηση 5 (Σχεδίαση Γ. Ζαχαρέγκας)

6) Ένα ομοίωμα ρουκέτας αρχικά εκτοξεύεται από την ηρεμία κατακόρυφα με επιτάχυνση $a(t) = 60t \text{ m/sec}^2$ και κινείται με αυτή την επιτάχυνση για τρία δευτερόλεπτα. Στη συνέχεια τελειώνουν τα καύσιμα και κινείται σαν 'ελεύθερο σώμα'. Μετά από 27sec ανοίγει το αλεξίπτωτο και η ταχύτητα του προς το έδαφος ελαττώνεται γραμμικά στο ρυθμό -500cm/sec για 5sec . Στη συνέχεια πέφτει στο έδαφος με το ρυθμό που απέκτησε μετά τα 5sec . (α) Να υπολογισθεί η θέση $s(t)$ και η ταχύτητα $u(t)$ για κάθε χρονική στιγμή και να γίνει η γραφική παράτασή τους. (β) Να υπολογισθεί η χρονική στιγμή που θα φτάσει στο μέγιστο ύψος και να προσδιορισθεί το ύψος αυτό. (γ) Να υπολογισθεί η διάρκεια της πτήσης της ρουκέτας.

Λύση: Θα προχωρήσουμε σταδιακά με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης

- Για το χρονικό διάστημα $t : 0 - 3\text{s}$ το ομοίωμα της ρουκέτας κινείται με επιτάχυνση $a(t) = 60t$ και με ταχύτητα $u(t) = 30t^2 + c_1$ και $s(t) = 10t^3 + c_1t + c_2$. Από τις αρχικές

συνθήκες ταχύτητας και θέσης βρίσκουμε ότι $u(t) = 30t^3$ και $s(t) = 10t^3$ άρα μετά από τα $3sec$ κινείται με ταχύτητα $270m/s$ και θα έχει ανέλθει σε ύψος $270m$.

- Για το χρονικό διάστημα $t : 3 - 30s$ το ομοίωμα κινείται επιβραδυνόμενο με $g = 10m/s^2$ και $s(t) = 270(t - 3) - 5(t - 3)^2$ και $s(t) = 270 - 10(t - 3)$. Άρα μετά από $27sec$ θα έχει διανύσει επιπλέον $3645m$
- Για τα επόμενα $5sec$ το ομοίωμα πέφτει προς το έδαφος με επιτάχυνση $5m/s$. Δηλαδή $u(t) = -5t$ και $s(t) = (5/2)t^2$. Μετά από $5sec$ θα έχει ταχύτητα $25m/sec$ και θα έχει κατέβει $62.5m$ μετά κινείται ομαλά με ταχύτητα $25m/sec$ για να καλύψει το υπόλοιπο της απόστασης που του απομένει μέχρι το έδαφος, δηλαδή $3852,5m$ σε $154,1sec$.

(β) Το ομοίωμα θα φτάσει στο μέγιστο ύψος των $3915m$ τη χρονική στιγμή $30sec$ και (γ) η συνολική του πτήση θα διαρκέσει $189,1sec$. (Να προσπαθήσετε να ζωγραφίσετε την καμπύλη).

Ασκήσεις Ανάλυση I

Λύσεις ασκήσεων Ομάδας 6

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$. Βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor της f με κέντρο $x_0 = 0$ και υπολογίστε προσεγγιστικά την τιμή της στο σημείο $x = 0, 2$.

Λύση: Ο τύπος της σειράς με κέντρο το 0 είναι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Υπολογίζουμε τις επιμέρους ποσότητες: $f(x) = xe^{-x}$, $f(0) = 0$, $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = -2e^{-x} + xe^{-x}$, $f''(0) = -2$, $f'''(x) = 3e^{-x} - xe^{-x}$, $f'''(0) = 3$. Οπότε χρησιμοποιώντας τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor της f έχουμε ότι $xe^{-x} \approx x - x^2 + \frac{x^3}{2}$. Αντικαθιστώντας τη τιμή 0,2 συμπεραίνουμε ότι $f(0, 2) = 0.164$. Αντικαθιστώντας τη τιμή 0.2 στη συνάρτηση στο Μαθηματίζα παίρνουμε την τιμή 0.163746.

2) Αναπτύξτε σε σειρά Taylor κέντρου $x_0 = 0$ τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{-x} - (1 - x)}{x^2}$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω ανάπτυγμα υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση: $f(x) = \frac{e^{-x} - (1 - x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(-1 + x + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots$. Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots \right) = \frac{1}{2}$.

3) Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση το ημίτονο γωνίας 0, 2 ακτινίων με τη χρήση των τεσσάρων πρώτων όρων του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)$ στο σημείο $x_0 = 0$. Εκτιμήστε επίσης το σφάλμα στον υπολογισμό του $\sin(0, 2)$.

Λύση: Από τη σειρά Taylor του ημιτόνου $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ έχουμε την προσέγγιση $\sin(0, 2) \approx 0, 2 - \frac{(0, 2)^3}{6} \approx 0, 19867$. Η εκτίμηση του σφάλματος αυτής της προσέγγισης είναι $R = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (0, 2)^4 = \left| \frac{\sin(\xi)}{4!} (0, 2)^4 \right| \leq \frac{(0, 2)^4}{4!} = \frac{0, 0016}{24} \approx 0, 000067$, όπου ξ τυχαίος αριθμός στο διάστημα $(0, 0, 2)$.

4) Ο καφές μέσα σε ένα φλιτζάνι βρίσκεται σε θερμοκρασία $T(t_0)$ την χρονική στιγμή t_0 σε ένα δωμάτιο με θερμοκρασία $T_1 = 20^\circ C$. Η θερμοκρασία του καφέ μεταβάλλεται με

το χρόνο

$$T(t) = (T(t_0) - T_1)e^{-\frac{t-t_0}{10}} + T_1, \quad t \geq t_0$$

Θα προσθέσουμε γάλα, ώστε στο φλιτζάνι να περιέχει 90% καφέ και 10% γάλα. Η θερμοκρασία του καφέ την χρονική στιγμή t_0 είναι 100°C και σχεδιάζουμε να πιούμε το καφέ την χρονική στιγμή $t = 10$. (Η μονάδα του χρόνου είναι παντού η ίδια, λεπτά). Το γάλα στο ψυγείο έχει θερμοκρασία 5°C . Ποια είναι η καλλίτερη στιγμή να προσθέσουμε το γάλα για να έχει ο καφές την υψηλότερη θερμοκρασία όταν αποφασίσουμε να τον πιούμε;

Λύση: Η θερμοκρασία του καφέ την χρονική στιγμή t_1 θα είναι

$$T_1(t_1) = 80 e^{-t_1/10} + 20$$

Το μείγμα θα έχει θερμοκρασία

$$\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}T_2 = 72 e^{-t_1/10} + 18 + 1/2$$

όπου T_1 είναι η θερμοκρασία του καφέ και T_2 η θερμοκρασία του γάλατος. Αν στο διάστημα $t_1 \leq t \leq 10$ η θερμοκρασία του μείγματος είναι $Y(t)$ τότε

$$\begin{aligned} Y(t) &= [Y(t_1) - 20]e^{-(t-t_1)/10} + 20 = \\ &= [72 e^{-t_1/10} - 1.5]e^{-(t-t_1)/10} + 20 \end{aligned}$$

και η τελική θερμοκρασία

$$T = Y(10) = e^{-1} [72 - (1.5)e^{t_1/10}] + 20$$

$$\frac{dT}{dt} = -(1.5/(10 e))e^{t_1/10} < 0 \quad (\text{φθίνουσα})$$

Η συνάρτηση συνεχώς φθίνει, δεν παρουσιάζει ελάχιστο και έχει την υψηλότερη θερμοκρασία τη στιγμή που ρίχνουμε μέσα το γάλα!!!

5) Αν η ανακλαστική επιφάνεια ενός τηλεσκοπίου περιγράφεται από τη σχέση

$$S = \frac{8\pi}{3}c^2 \left[\left(\frac{d^2}{16c^2} + 1 \right)^{3/2} - 1 \right]$$

και για τα περισσότερα τηλεσκόπια $d^2/16c^2 \ll 1$ δείξτε ότι η επιφάνεια του τηλεσκοπίου μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση $\pi d^2/4$.

Λύση: Αν $x = d^2/16c^2 \ll 1$, αναπτύσσω σε σειρά τη σχέση $(x+1)^{3/2} \simeq 1 + (3/2)x$

$$\frac{8\pi}{3}c^2 \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{d^2}{16c^2} \right) - 1 \right] \simeq \frac{\pi d^2}{4}$$

6) Να υπολογισθεί η τετραγωνική προσέγγιση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sec x}{\sqrt{1-x^2}}$$

στη περιοχή $x \approx 0$.

Λύση: Αναπτύσσουμε και το $\sec x$ αλλά και το $(1-x^2)^{-1/2}$, και έχουμε

$$\frac{\sec x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\cos x \sqrt{1-x^2}} \simeq \frac{1}{(1-1/2x^2)(1-1/2x^2)} \simeq \frac{1}{1-x^2} \simeq 1+x^2$$

Ασκήσεις Ανάλυση Ι

Ομάδα 7

Λύσεις

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

1) Ένας παραγωγός μπορεί και πουλάει x προϊόντα την εβδομάδα στην τιμή $P = 200 - 0,01x$ το καθένα. Το συνολικό κόστος για την παραγωγή των x αυτών προϊόντων είναι $y = 50x + 20000$ ευρώ. Πόσα προϊόντα πρέπει να παράγει ο παραγωγός για να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος; Να βρεθεί το κέρδος αυτό.

Λύση: Τα συνολικά εβδομαδιαία έσοδα του παραγωγού από την πώληση των προϊόντων του είναι $xP = x(200 - 0,01x) = 200x - 0,01x^2$. Το κέρδος T του παραγωγού είναι τα έσοδά του μείον το κόστος του. Δηλαδή $T = xP - y = 200x - 0,01x^2 - 50x - 20000$. Παραγωγίζουμε ως προς x και έχουμε $T' = \frac{dT}{dx} = 150 - 0,02x$. Οπότε $T' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{150}{0,02} = 7500$. Επίσης $T'' = -0,02 < 0$ (μέγιστο). Δηλαδή, ο παραγωγός θα πρέπει να παράγει 7500 προϊόντα εβδομαδιαίως για να έχει το μέγιστο κέρδος. Επομένως το μέγιστο κέρδος του παραγωγού θα είναι $T = 150(7500) - 0,01(7500)^2 - 20000 = 582500$ ευρώ.

2) Να υπολογιστούν τα όρια:

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1 + \tan x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 - \tan x) \sec(2x)$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

Λύση:

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1 + \tan x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2(x)}{\sec^2(x)} = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/\sin x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/\sin x} \tan x = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x = -1 \cdot 0 = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 - \tan x) \sec(2x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1/\sec(2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos(2x)} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sec^2 x}{-2 \sin(2x)} = \frac{-2}{-2} = 1$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \right) \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \right) = \frac{0}{2} = 0$$

3) Υπολογίστε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων

1. $e^{\sin x}$
2. $\ln \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} \right)$
3. $\cos^3[\sin(2x)]$
4. $x^3 \sin^2(5x)$

Λύση:

1. $e^{\sin x} \cos x$
2. $\frac{-1}{\sin x}$
3. $-6 \cos^2[\sin(2x)] \sin[\sin(2x)] \cos(2x)$
4. $10x^3 \sin(5x) \cos(5x) + 3x^2 \sin^2(5x)$

4) Αν στη μέτρηση του x (κοντά στην αρχή των αξόνων) κάνουμε λάθος κατά 3%, πόσο λάθος κάνουμε στον υπολογισμό της θερμοκρασίας που περιγράφεται αναλυτικά από την συνάρτηση

$$T(x) = \frac{(1+x)^{3/2}}{1+2x}$$

Λύση: Το λάθος στη μέτρηση της θερμοκρασίας είναι

$$\Delta T = \left[\frac{dT(0)}{dx} \right] \Delta x$$

Υπολογίζουμε το την παράγωγο της θερμοκρασίας

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{-2(1+x)^{3/2}}{(1+2x)^2} + \frac{3\sqrt{1-x}}{2(1+2x)}$$

$$\Delta T(x=0) = (1/2) \cdot 0.03 = 1.5\%$$

5) (α) Να βρεθούν δύο θετικοί αριθμοί των οποίων το γινόμενο είναι 10 και το άθροισμα γίνεται μέγιστο. (β) Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης $73x^2 - 72xy + 52y^2 = 2500$, που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

Λύση: (α) Οι θετικοί αριθμοί που δίνουν ακρότατα στο άθροισμα είναι $x = \sqrt{10}$, $y = \sqrt{10}$ αλλά δεν δίνουν μέγιστο, οπότε η απάντηση στο ερώτημα, όπως έχει τεθεί, είναι αρνητική.

(β) Η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι

$$g(x) = d^2 = x^2 + y^2(x)$$

και τα σημεία x, y ακολουθούν την καμπύλη

$$73x^2 - 72xy(x) + 52y^2(x) = 2500. \quad (1)$$

Άρα για να γίνει η απόσταση ελάχιστη θα πρέπει $g'(x) = 0 \rightarrow y' = -x/y$. Παραγωγίζουμε την Εξ. (1), λύνουμε και αντικαθιστούμε τα σημεία που μηδενίζεται η $g'(x)$ και στη συνέχεια λύνουμε ως προς y

$$y = \frac{4}{3}x, \quad y = -\frac{4}{3}x.$$

Στο σημείο $y = (4/3x)$ η Εξ. 1 γράφεται

$$73x^2 + 72x(4/3x) + 52(16/9)x^2 = 2500$$

και έχει λύσεις $x = 8, -8$ και αντίστοιχα το $y = 6, -6$. Για $y = -(3/4)x$ έχουμε δύο ακόμα ζευγάρια τιμών $(4, -4)$ για το x και $(3, -3)$ για το y . Οπότε έχουμε τέσσερα σημεία από τα οποία τα δύο $(4, -3), (-4, 3)$ είναι τα πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων. (Η καμπύλη είναι έλλειψη με αντεστραμμένους άξονες οπότε τα σημεία είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων).

6) Υπολογίστε την περίμετρο ενός πολυγώνου με n γωνίες που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας μήκους 1 και στη συνέχεια υπολογίστε την περίμετρο όταν το $n \rightarrow \infty$. (Χρησιμοποιήστε την τετραγωνική προσέγγιση του $\cos \theta$ στη γειτονιά του $\theta = 0$.)

Λύση: Από το νόμο του συνημιτόνου στο τρίγωνο με πλευρές a, b και c με γωνία θ απέναντι από την πλευρά c

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

και για $a = b = 1$ και $\theta = 2\pi/n$ έχουμε

$$c = \sqrt{2 - 2 \cos(2\pi/n)}$$

Η περίμετρος $n \sqrt{2 - 2 \cos(2\pi/n)}$ και με την προσέγγιση $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$. Αν το $n \rightarrow \infty$ και $\theta = 2\pi/n \rightarrow 0$ θα έχουμε

$$n \sqrt{2 - 2 \cos(2\pi/n)} \approx n \sqrt{(2\pi/n)^2} = n(2\pi/n) = 2\pi.$$

Ασκήσεις Ανάλυση Ι

Ομάδα 8

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος
Ημερομηνία Παράδοσης 13-12-2011

1) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{8-2x^2}}$$

Λύση:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{8-2x^2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{8-2x^2} + c$$

2) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

1. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$

2. $\int \tan^6 x \sec^2 x dx$

3. $\int \frac{x dx}{x+5}$

Λύση:

1. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2} \cot^2 x + c$

2. $\int \tan^6 x \sec^2 x dx = \frac{\tan^7 x}{7} + c$

3. $\int \frac{x dx}{x+5} = x - 5 \ln(5+x) + c$

3) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} dx$$

Λύση: Αντικαθιστούμε το $u^2 = x+2$ και έχουμε

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} dx = 2 \int \sqrt{u^2-1} du$$

Θέτω $t = u + \sqrt{u^2 - 1}$

$$2 \int \sqrt{u^2 - 1} du = \int \frac{(t^2 - 1)^2}{2t^3} dt = \sqrt{(x+1)(x+2)} - \ln \left| \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} \right| + c$$

4) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

1. $\int \ln x \, dx$

2. $\int x^2 \cos x \, dx$

Λύση:

1. $\int \ln x \, dx = \int (x)' \ln x \, dx = x \ln x - \int x(\ln x)' \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$

2. $\int x^2 \cos x \, dx = \int x^2 (\sin x)' \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx = x^2 \sin x + 2 \int x(\cos x)' \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c.$

5) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

1. $\int x^3 \cos(x^4) \, dx$

2. $\int \sin^2 x \, dx$

Λύση:

1. Θέτοντας $y = x^4$ έχουμε $\int x^3 \cos(x^4) \, dx = \frac{1}{4} \int \cos(y) \, dy = \frac{1}{4} \sin y + c = \frac{1}{4} \sin(x^4) + c.$

2. Επειδή $I = \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, έχουμε $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx$. Θέτοντας $y = 2x$ έχουμε $I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \cos y \, dy = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + c.$

6) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

1. $\int \sin(\ln x) \, dx$

2. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$

Λύση:

1. $I = \int \sin(\ln x) dx = \int (x)' \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int x(\sin(\ln x))' dx =$
 $x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int (x)' \cos(\ln x) dx =$
 $x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I \Rightarrow I = \frac{1}{2}[x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)] + c.$
2. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x(\tan x)' dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$
 $x \tan x + \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = x \tan x + \ln |\cos x| + c.$

Ασκήσεις Ανάλυση Ι

Ομάδα 9

Λύσεις

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

1) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 31x - 12}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx$$

Λύση: Μετά την διαίρεση των πολυωνύμων βρίσκουμε

$$\frac{3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 31x - 12}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = 3x - 1 + \frac{4x^2 - 13x}{x^3 - x^2 - 8x + 12}.$$

Επειδή $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x + 3)(x - 2)^2$ έχουμε την ανάλυση σε μερικά κλάσματα

$$\frac{4x^2 - 13x}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \frac{3}{x + 3} + \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{(x - 2)^2}.$$

Οπότε τελικά παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 31x - 12}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx &= \int (3x - 1) dx + \int \frac{3dx}{x + 3} + \int \frac{dx}{x - 2} - \int \frac{2dx}{(x - 2)^2} = \\ &= \frac{3x^2}{2} - x + 3 \ln |x + 3| + \ln |x - 2| + \frac{2}{x - 2} + c. \end{aligned}$$

2) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$
2. $\int \sqrt{\frac{x}{1 - x}} dx$

Λύση:

1. Θέτοντας $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$ παίρνουμε $x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$, $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$, $dx = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t^2} \right) dt$.

$$\text{Οπότε έχουμε } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t^2} \right) dt}{\frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{t} \right) \left(t + \frac{1}{t} \right)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \int \frac{dt}{t - 1} - \int \frac{dt}{t + 1} =$$

$$\ln |t - 1| - \ln |t + 1| + c = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 1} - 1}{x + \sqrt{x^2 + 1} + 1} \right| + c.$$

2. Θέτοντας $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ παίρνουμε $x = \frac{t^2}{t^2+1}$, $dx = \frac{2tdt}{(t^2+1)^2}$. Οπότε έχουμε $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int t \frac{2tdt}{(t^2+1)^2} = -\int t \left(\frac{t}{t^2+1} \right)' = -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{t}{t^2+1} + \arctan t + c = \arctan \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} \right) - \sqrt{x(1-x)} + c$.

3) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

1. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x}$
2. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-4x+13}} dx$

Λύση :

1. Θέτοντας $t = e^x$ έχουμε $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t^2 + t} = \int \frac{dt}{t^2(t+1)} = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t+1} = -\ln|t| - \frac{1}{t} + \ln|t+1| + c = -x - e^x + \ln(e^x + 1) + c$.
2. Επειδή $x^2-4x+13 = (x-2)^2+3^2$ θέτουμε $3z = x-2$, οπότε παίρνουμε $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-4x+13}} dx = \int \frac{6z+1}{\sqrt{z^2+1}} dz = 3 \int \frac{2z}{\sqrt{z^2+1}} dz + \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = 6\sqrt{z^2+1} + \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $t = z + \sqrt{z^2+1}$ οπότε γίνεται $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c_1 = \ln|z + \sqrt{z^2+1}| + c_1$. Επομένως τελικά παίρνουμε $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-4x+13}} dx = 2\sqrt{x^2-4x+13} + \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-4x+13} + x - 2}{3} \right| + c$.

4) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

1. $\int_0^1 \ln x dx$
2. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

Λύση :

1. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [x \ln x - x]_\varepsilon^1 = -1$

2. Αντικαθιστούμε το $\sqrt{x} = u$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx &= \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx + \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_1^\ell \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \\ &= \lim_{k \rightarrow 0^+} [2 \arctan \sqrt{x}]_k^1 + \lim_{\ell \rightarrow \infty} [2 \arctan \sqrt{x}]_1^\ell = \pi\end{aligned}$$

5) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{18}^{19} \frac{dx}{x^2 - 34x + 289}$$

Λύση: Αντικαθιστούμε το $x - 17 = z$

$$\int_{18}^{19} \frac{dx}{x^2 - 34x + 289} = \int_1^2 \frac{dz}{z^2} = 1/2$$

6) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^3(1+x^2)}$$

Λύση: Για $x \geq 2$ είναι

$$\frac{1}{x^3} > \frac{1}{x^3(1+x^2)}$$

και εφόσον

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_2^\ell \frac{dx}{x^3} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^{-2}}{2} \right)_2^\ell = \frac{1}{2} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\ell^2} \right) = \frac{1}{8}$$

οπότε το ολοκλήρωμα υπολογίζεται προσεγγιστικά από τη σχέση,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^3(1+x^2)} < \int_2^\infty \frac{dx}{x^3} = 1/8$$

Ασκήσεις Ανάλυση Ι

Ομάδα 10

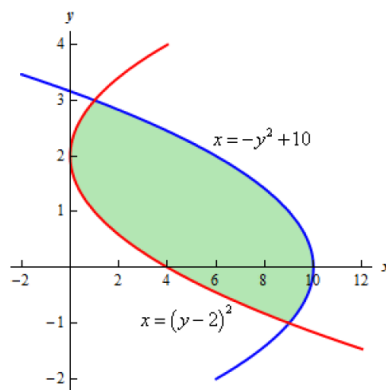
Λύσεις

Λουκάς Βλάχος και Χάρης Σκόκος

1) Να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής του επιπέδου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις $x = -y^2 + 10$ και $x = (y - 2)^2$.

Λύση: Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία τομής των δυο καμπυλών (Σχ. 1): $-y^2 + 10 = (y - 2)^2 \Leftrightarrow 2y^2 - 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -1, y = 3$. Επομένως για το εμβαδό A έχουμε:

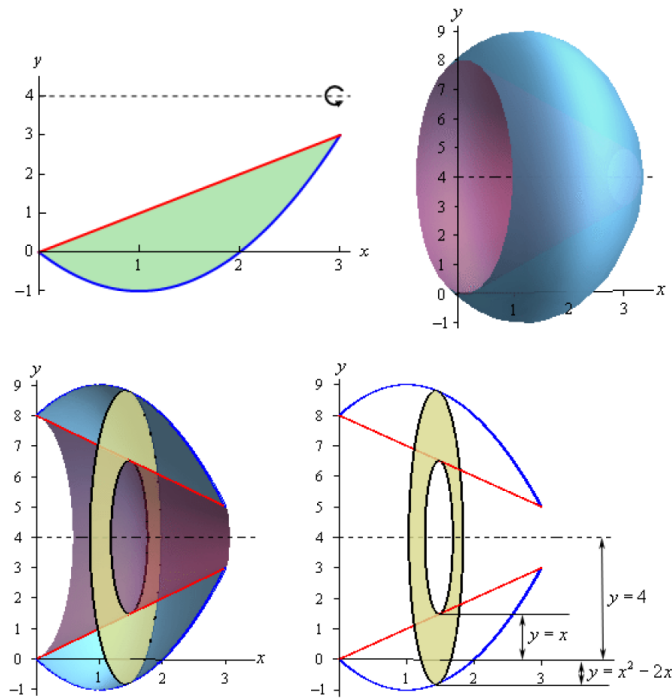
$$A = \int_{-1}^3 [-y^2 + 10 - (y - 2)^2] dy = \left(-\frac{2}{3}y^3 + 2y^2 + 6y \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{64}{3}.$$



Σχήμα 1: Το σχήμα της άσκησης 1.

2) Να υπολογιστεί ο όγκος V του στερεού το οποίο παράγεται από την περιστροφή γύρω από την ευθεία $y = 4$ της περιοχής του επιπέδου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις $y = x^2 - 2x$ και $y = x$.

Λύση: Το στερεό φαίνεται στο Σχ. 2. Οι δυο καμπύλες τέμνονται στα σημεία με $x = 0$ και $x = 3$. Θα υπολογίσουμε τον όγκο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δακτυλίων. Από το Σχ. 2 βλέπουμε ότι η εσωτερική ακτίνα του δακτυλίου είναι $4 - x$ και η εξωτερική



Σχήμα 2: Το σχήμα της άσκησης 2.

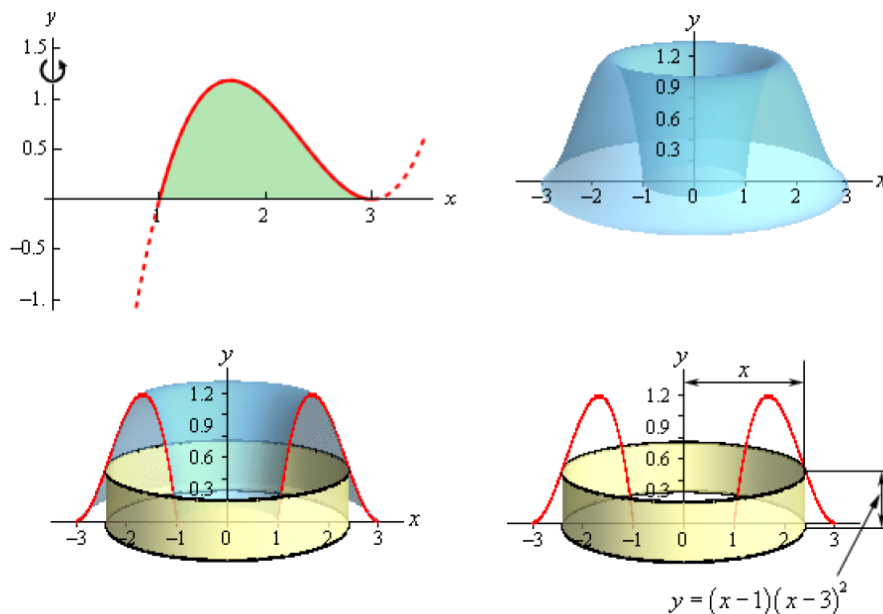
$4 - (x^2 - 2x) = -x^2 + 2x + 4$. Οπότε ο όγκος V είναι:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \pi [(-x^2 + 2x + 4)^2 - (4 - x^2)^2] dx = \pi \int_0^3 (x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x) dx = \\ &= \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 12x^2 \right) \Big|_0^3 = \pi \frac{153}{5}. \end{aligned}$$

3) Να υπολογιστεί ο όγκος V του στερεού το οποίο παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα y της περιοχής του επιπέδου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $y = (x - 1)(x - 3)^2$ και τον άξονα x .

Λύση: Το στερεό φαίνεται στο Σχ. 3. Θα υπολογίσουμε τον όγκο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των κυλίνδρων. Από το Σχ. 3 βλέπουμε ότι η ακτίνα του κυλίνδρου είναι x και το ύψος του $(x - 1)(x - 3)^2$. Οι οριακές θέσεις του κυλίνδρου βρίσκονται για $x = 1$ και $x = 3$. Οπότε ο όγκος V είναι:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^3 2\pi[x] [(x - 1)(x - 3)^2] dx = 2\pi \int_1^3 (x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 9x) dx = \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{4}x^4 + 5x^3 - \frac{9}{2}x^2 \right) \Big|_1^3 = \pi \frac{24}{5}. \end{aligned}$$



Σχήμα 3: Το σχήμα της άσκησης 3.

4)

1. Να υπολογισθεί το μήκος της καμπύλης $x = t^2, y = t^3$ για $0 \leq t \leq 2$.
2. Να υπολογισθεί η περίμετρος της έλλειψης.

Λύση:

1.

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \\
 &= \int_0^2 (4 + 9t^2)^{1/2} t dt = \frac{8}{27} (-1 + 10\sqrt{10})
 \end{aligned}$$

2. Ο υπολογισμός της περιμέτρου της έλλειψης περιέργως δεν είναι καθόλου απλός. Ας ορίσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = a \cos t \text{ και } y = b \sin t$$

τότε η περίμετρος υπολογίζεται από τη σχέση

$$S = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$S = 4aE(e^2)$$

όπου

$$E(e^2) = \int_0^{\pi/2} (1 - e^2 \cos^2 t)^{1/2} dt$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \eta \text{ εκκεντρότητα της έλλειψης.}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό λύνεται μόνο προσεγγιστικά ή αριθμητικά. Αναζητήστε μόνοι σας την προσέγγιση των λύσεων κάνοντας υποθέσεις για την εκκεντρότητα e , για να ανακαλύψετε και αυτή τη διάσταση στα ολοκληρώματα.

5) Να υπολογισθεί η επιφάνεια και ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της έλλειψης γύρω από τον άξονα Ox .

Λύση: Ο όγκος του ελλειψοειδούς που δημιουργείται από την περιστροφή της έλλειψης γύρω από τον άξονα Ox είναι

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a y^2 dx \\ &= 2\pi b^2 \int_0^a \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \right] dx = \frac{4}{3} \pi b^2 a \end{aligned}$$

Η επιφάνεια υπολογίζεται από τη σχέση

$$E = 4\pi \int_0^a y(x) \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$$

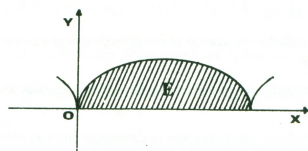
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \Rightarrow \frac{y(dy/dx)}{b^2} = -\frac{x}{a^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \Rightarrow \\ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 &= 1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} = \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^4 y^2} = \frac{b^4 x^2 + a^4 b^2 (1 - x^2/a^2)}{a^4 b^2 (1 - x^2/a^2)} = \frac{a^4 b^2 + b^4 x^2 - a^2 b^2 x^2}{a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2} \\ &= \frac{a^4 + b^2 x^2 - a^2 x^2}{a^4 - a^2 x^2} = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)} \end{aligned}$$

οπότε,

$$\begin{aligned} E &= 2 \int_0^a 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = 4\pi \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a \sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx = \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^{a\sqrt{a^2-b^2}} \sqrt{a^4 - u^2} \frac{du}{\sqrt{a^2 - b^2}} [u = \sqrt{a^2 - b^2}x] \\ &= \frac{4\pi b}{a^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \left[\frac{u}{2} \sqrt{a^4 - u^2} + \frac{a^4}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a^2} \right]_0^{a\sqrt{a^2-b^2}} \\ &= \frac{4\pi b}{a^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \left[\frac{a \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \sqrt{a^4 - a^2(a^2 - b^2)} + \frac{a^4}{2} \sin^{-1} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right] = 2\pi \left[b^2 + \frac{a^2 b \sin^{-1} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right] \end{aligned}$$

6)

1. Βρείτε το μήκος του τόξου του καρδιοειδούς $r = 1 + \cos \theta$.
2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κοινού τόπου μεταξύ του κύκλου $r = 3/2$ και της καρδιοειδούς καμπύλης $r = 1 + \cos \theta$.
3. Να βρεθεί το εμβαδόν του τόπου, που ορίζεται από τον άξονα Ox και ένα τόξο της κυκλοειδούς καμπύλης που ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$.



Λύση:

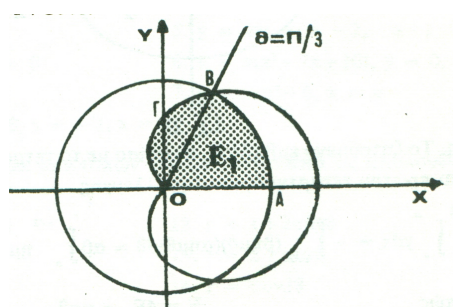
1. Υπολογίζουμε το

$$\frac{dr}{d\theta} = -\sin \theta,$$

οπότε

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cos^2 \theta / 2} d\theta = 8 \end{aligned}$$

2. Το ζητούμενο εμβαδό E είναι διπλάσιο του εμβαδού E_1 του τόπου $OAB\Gamma$ (βλέπε Σχ. 4) που αποτελείται από δύο τμήματα. Το ένα διαγράφεται από την πολική ακτίνα $r = 3/2$ από $\theta = 0$ ως $\theta = \pi/3$, ενώ το δεύτερο από την $r = 1 + \cos \theta$ από $\theta = \pi/3$ ως $\theta = \pi$.



Σχήμα 4: Σχήμα για την άσκηση 6.2

Συνεπώς

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (3/2)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} \frac{9}{4} \theta \Big|_0^{\pi/3} + \frac{1}{2} [\theta + 2 \sin \theta]_{\pi/3}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \\ &= \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} [\pi - \pi/3 - 2 \sin \pi/3] + \frac{1}{2} [\theta/2 + \frac{\sin 2\theta}{4}]_{\pi/3}^{\pi} = \\ &= \frac{7\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$E = 2E_1 = 7\pi/4 - 9\sqrt{3}/8$$

3. Ένα τόξο της κυκλοειδούς διαγράφεται, όταν η θ μεταβάλλεται από 0 ως 2π , διάστημα κατά το οποίο μεταβάλλεται και η x .

Συνεπώς

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta - 2 \cos \theta) d\theta = \\ &= [\frac{3}{2} \theta - 2 \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta]_0^{2\pi} = \frac{3}{2} 2\pi = 3\pi \end{aligned}$$